Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

19.06.2019

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2019 — Blatt 4

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Seien $H, g > 0$ und $x_1 < x_2$. Betrachten Sie das Funktional

$$u \mapsto T(u) := \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+u'^2}{H-u}}\, \mathrm{d}x\,.$$

Sei $u \in C^2(x_1, x_2)$ ein Minimierer von T. Dann gilt

$$(H-u)(1+u'^2) = 2r \qquad (\star)$$

für eine geeignete Konstante $r > 0$.

(a) Sei $\tau \in C^1(x_1, x_2)$. Machen Sie den Ansatz

$$u'(x) = -\frac{1}{\tan\frac{\tau(x)}{2}} = -\frac{\cos\frac{\tau(x)}{2}}{\sin\frac{\tau(x)}{2}}$$

und bestimmen Sie $u(\tau)$.

(b) Leiten Sie ein AWP für τ her, so dass $u(\tau)$ $(\star)$ erfüllt.

(c) Bestimmen Sie $x(\tau)$, so dass die Kurve $\tau \mapsto (x(\tau), u(\tau))$ eine Lösung des Brachystochronen-Problem ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $\beta, \sigma, \rho, g > 0$ Konstanten und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$u \mapsto E(u) := \sigma \int_\Omega \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\rho g \int_\Omega u^2\, \mathrm{d}x - \sigma\beta \int_{\partial\Omega} u\, \mathrm{d}S$$

her.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in [0, \pi]$ der von u und v eingeschlossene Winkel. Zeigen Sie, dass

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\| \cos(\alpha)\,.$$

(b) Für $v \in C^1(\mathbb{R})$ sei $\Psi = \Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, der Winkel, den die Tangente an den Graphen von v im Punkt $(x, v(x)) \in \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse einschließt. Zeigen Sie, dass

$$v'(x) = \sqrt{1 + v(x)^2}\, \sin(\Psi(x))\,.$$

Abgabe: Mittwoch, den 03.07.2019, vor der Vorlesung.