Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

03.07.2019

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2019 — Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die zweidimensionale Einheitskugel. Betrachten Sie für vorgeschriebene Randdaten $\beta : \partial B_1(0) \to \mathbb{R}$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(Tu) &= Bu \qquad \text{in } B_1(0)\,, \\ \nu \cdot Tu &= \beta \qquad \text{auf } \partial B_1(0)\,, \end{aligned}$$

wobei $Tu := (1 + \|\nabla u\|)^{-1/2}\, \nabla u$, $B > 0$ und ν die äußere Einheitsnormale an $\partial B_1(0)$ sind. Leiten Sie das Randwertproblem für rotationssymmetrische Lösungen der Form $u(x) = v(\|x\|)$ her.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $x \in (-1, 1)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ monoton wachsend ist.

(b) Seien $x, y \in (-1, 1)$ so, dass

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,.$$

Zeigen Sie, dass $x < y$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $w : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ und $(t, w(t))$ die Parametrisierung einer Kurve S im $\mathbb{R}^2$. Dann heisst

$$K_w := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{w'}{\sqrt{1 + w'^2}}\right)$$

die Krümmung der Kurve S. Zeigen Sie, dass für ein Kreissegment S mit Radius α gilt:

$$K_w = \frac{1}{\alpha} = \text{konstant.}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $(t, u(t))$, $(t, w(t))$ die Parametrisierungen zweier Kurven mit $u, w : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} u(0) &= w(0) \\ u'(0) &= w'(0) = 0 \\ K_u(0) &> K_w(0) \\ K_u'(r) &> K_w'(r) \end{aligned}$$

für $r \in (-1, 1)$. Dann gilt für $s \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} u(s) &> w(s)\,, \\ u'(s) &> w'(s)\,. \end{aligned}$$

Abgabe: Mittwoch, den 17.07.2019, vor der Vorlesung.