

Praktische Übung zur Vorlesung
Numerik für Differentialgleichungen
SS 2019 — Blatt 2

Abgabe: Bis 23.05.2019, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1

(10 Punkte)

Wir betrachten wieder die Federpendelgleichung von Blatt 1

$$y''(t) + ay'(t) + y(t) = 0, \quad (1)$$

mit Anfangsdaten $y(0) = y_0$ und $y'(0) = v_0$.

- (a) Implementieren Sie das Euler-Collatz-Verfahren, welches durch die Vorschrift

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \right)$$

mit $t_n = t_0 + nh$ für eine gegebene Schrittweite h definiert ist.

- (b) Das implizite Eulerverfahren ist gegeben durch die Vorschrift

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren für Differentialgleichungen der Form (1). Benutzen Sie zum lösen der Gleichungssysteme die Fixpunktiteration

$$\begin{aligned} y_{n+1}^0 &= y_n \\ y_{n+1}^{k+1} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}^k) \end{aligned}$$

mit einem geeigneten Abbruchkriterium.

- (c) Wir betrachten die Federpendelgleichung (siehe Blatt 1, 1(b)) auf dem Interval $[0, 40]$. Vergleichen Sie graphisch die Lösungen des impliziten Eulerverfahrens, des expliziten Eulerverfahrens, des Euler-Collatz-Verfahrens und die exakte Lösung und berechnen Sie die den Approximationsfehler $|y_N - y(t_N)|$ zum Zeitpunkt $t_N = 40$ für die Schrittweiten $h = 2^{-s}$, $s = 1, \dots, 5$.

Plotten Sie den Approximationfehler der Verfahren gegen die Schrittweiten. Was können sie zum Konvergenzverhalten der Verfahren sagen?