Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. S. Wolff-Vorbeck

06.06.2019

Praktische Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2019 — Blatt 3

Abgabe: Bis 27.06.2019, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

auf dem Interval $I = [t_0, T]$.

(a) Implementieren Sie ein Verfahren, dass zu gegebenem Butcher-Tableau das zugehörige explizite Runge-Kutta-Verfahren für Differentialgleichungen der Form (1) realisiert.

Testen Sie ihr Verfahren für das explizite Euler-Verfahren und das klassische Runge-Kutta-Verfahren anhand des Anfangwertproblems

$$y'(t) = -2y(t) + 5\cos(t), \quad y(0) = 2.$$

Die exakte Lösung ist gegeben durch $y(t) = 2\cos(t) + \sin(t)$. Berechnen Sie für beide Verfahren den Approximationsfehler $|y_N - y(t_N)|$ zum Zeitpunkt $T = 10$ für Schrittweiten $h = 2^{-s}$, $s = 1, \ldots, 5$ und plotten sie ihre Ergebnisse.

(b) Das (skalierte) verallgemeinerte Räuber-Beute-Modell ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{B} &= (1 - \epsilon B)B - \frac{R}{1 + \kappa B} B \\ \dot{R} &= \delta \frac{B}{1 + \kappa B} R - \delta R \end{aligned}$$

mit Parametern $\delta, \epsilon, \kappa \geq 0$.

(a) Berechnen Sie per Hand die drei stationären Zustände des obigen Systems und beschreiben Sie diese.

(b) Lösen Sie das Räuber-Beute-Modell mit $\delta = 1$, $\kappa = 0.5$, $B_0 = 6$ und $R_0 = 1$ auf dem Interval $[0, 100]$ für $\epsilon = 0.15$, $\epsilon = 0.3$ und $\epsilon = 0.6$. Wählen Sie dazu ein geeigetes explizites Verfahren mit einer geeigneten Zeitschrittweite aus und begründen Sie ihre Wahl.

(c) Stellen Sie ihre Ergebnisse in einem Phasendiagramm (B-R-Plot) da. Was können Sie zum Verhalten der Lösung für die verschiedenen ϵ sagen.

Aufgabe 2 (Der Lorenz-Attraktor) (*Bonusaufgabe: 4 Punkte)

1963 entwickelte Edward Lorenz ein vereinfachtes mathematisches Modell für die atmosphärische Konvektion. Das Modell ist ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die heute als die Lorenz-Gleichungen bekannt sind:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \sigma(x_2 - x_1) \\ x_2'(t) &= x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ x_3'(t) &= x_1 x_2 - \beta x_3, \end{aligned}$$

mit $\rho = 28$, $\sigma = 10$, und $\beta = \frac{8}{3}$.

(a) Erfüllt der Lorenz-Attraktor die für den Satz von Picard-Lindelöf notwendigen Bedingungen?

(b) Implementieren Sie ein Runge-Kutta Verfahren 4.ter Ordnung (**RK4**) um das obige System zu lösen und visuallisieren Sie die Lösung in einem **3d**-Plot.