Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. S. Wolff-Vorbeck

27.06.2019

Praktische Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2019 — Blatt 5

Abgabe: Bis 11.07.2019, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Lineare m-Multischrittverfahren sind gegeben durch die Verfahrensvorschrift

$$\sum_{j=0}^{m} a_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(t_{n+j}, y_{n+j}),$$

wobei die Koeffizienten $a_0, \dots, a_m$ und $b_0, \dots, b_m$ die Methode bestimmen. Die Verfahren sind explizit für $b_m = 0$ und implizit für $b_m \neq 0$.

(a) Die Adams-Bashforth-Verfahren sind gegeben durch die Wahl $a_m = 1$, $a_{m-1} = -1$, $a_{m-2} = \cdots = a_0 = 0$ und $b_m = 0$.

Implementieren sie die Adams-Bashforth-Verfahren für $m = 2, 3$. Die Koeffizienten b_j sind für

$$\begin{aligned} m = 2: &\qquad b_1 = \tfrac{3}{2},\ b_0 = -\tfrac{1}{2}, \\ m = 3: &\qquad b_2 = \tfrac{23}{12},\ b_1 = -\tfrac{4}{3},\ b_0 = \tfrac{5}{12}, \end{aligned}$$

(b) Die *BDF*-Verfahren (Backwards Differentiation Formulas) sind für $m \geq 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} b_m &= 1, \qquad b_{m-1} = \cdots = b_0 = 0, \\ a_m &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}, \\ a_j &= (-1)^{m-j} \sum_{k=m-j}^{m} \frac{1}{k} \binom{k}{m-j}, \qquad j = m-1, \dots, 0. \end{aligned}$$

Implementieren Sie die BDF-Verfahren für $m = 1, 2.$. Benutzen Sie zur Lösung der impliziten Gleichung die Fixpunktiteration von Blatt 2.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \text{ auf } (a,b), \\ u(a) &= u_a, \\ u(b) &= u_b. \end{aligned}$$

(a) Implementieren Sie ein Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung des obigen Randwertproblems mit $f(x) = 4\pi^2 sin(2\pi x)$ auf dem Interval $[0,1]$ mit Randwerten $u(0) = u(1) = 0$. Nutzen Sie zur Approximation der zweiten Ableitung den Differenzenquotienten

$$u''(x) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

mit $u_i = u(ih)$.

(b) Die exakte Lösung ist gegeben durch $u = \sin(2\pi x)$. Lösen Sie das Rabdwertproblem aus Aufgabe (a) mit Schrittweiten $h = 2^{-j}$, $j = 1, ..., 5$ und berechnen Sie den Fehler

$$E_h = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N} |u_i - u(x_i)|.$$

Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.