Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

13.05.2019

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2019 — Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei I ein offenes Intervall und sei $g : I \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'(t) + g(t)u(t) = 0 \qquad \text{für } t \in I\,.$$

Aufgabe 2 (Methode der Variation der Konstanten) (4 Punkte)

Sei I ein offenes Intervall und seien $g, h : I \mapsto \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$Lu := u'(t) + g(t)u(t) = h(t) \qquad \text{für } t \in I$$

dem Superpositionsprinzip genügt:

Für $i = 1, 2, \ldots, n$ seien $h_i : I \mapsto \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $u_i \in C^1(I)$ jeweils Lösung von $Lu_i = h_i$ in I.

Dann ist $\bar{u} := \sum_{i=1}^n u_i$ eine Lösung von $L\bar{u} = \bar{h}$ in I, wobei $\bar{h} := \sum_{i=1}^n h_i$.

(b) Seien $s_0 \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in I$. Setze

$$G(t) := \int_{t_0}^t g(r)\,\mathrm{d}r \qquad \text{für } t \in I\,.$$

Bestimmen Sie $C \in C^1(I)$ so, dass $u(t) := C(t)\,\mathrm{e}^{-G(t)}$ für $t \in I$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} Lu &= h \quad \text{in } I\,, \\ u(t_0) &= s_0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $(*)$ genau eine Lösung $u \in C^1(I)$ besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\frac{1}{u(t)}\sqrt{1 - u(t)^2}\,, \\ u(0) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem mittels Separation der Variablen.

(b) Besitzt das Anfangswertproblem noch weitere Lösungen?

(c) Berechnen Sie für eine gegebene (konstante) Schrittweite $\tau > 0$ mit Hilfe des Euler-Verfahrens eine diskrete Lösung u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Das *Crank-Nicholson* Verfahren zur Approximation der Lösung u der Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \, , \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

ist für $t_i = ih$ gegeben durch

$$u_{i_1} = u_i + \frac{h}{2} \left(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}) \right) \, .$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.

Abgabe: Montag, den 27.05.2019, vor der Vorlesung.