Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

27.05.2019

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2019 — Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das *Crank-Nicholson* Verfahren (siehe Blatt 3) ein Runge-Kutta Verfahren 2. Stufe ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$u_{i+1} = u_i + h\Phi(t_i, u_i, h)$$

mit $t_{i+1} = t_i + h$ für $h > 0$ und

$$\Phi(t, u, h) := f\left(t + \tfrac{h}{2}, u + \tfrac{h}{2} f(t, u)\right)$$

für glattes f ein Einschrittverfahren der Konsistenzordnung 2 zur Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

definiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $y \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $h > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $t_k := kh$ und setze $y^k := y(t_k)$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Vorwärts und Rückwartsdifferenzenquotienten

$$\Delta_+^h y^k := \frac{y^{k+1} - y^k}{h} \qquad \Delta_-^h y^k := \frac{y^k - y^{k-1}}{h}$$

die Abschätzungen

$$\left|\Delta_\pm^h y^k - y'(t_k)\right| \leq \frac{h}{2} \sup_{t \in t_k \pm [0,h]} |y''(t)|$$

gelten.

(b) Der zentrale Differenzenquotient ist gegeben durch

$$\Delta^h y^k := \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2h} \,.$$

Zeigen Sie, dass $\left|\Delta^h y^k - y'(t_k)\right| = \mathcal{O}(h^2)$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u' = -\alpha u \quad \text{in } (t_0, \infty)\,, \qquad u(t_0) = 1$$

für $\alpha > 0$.

(a) Sei $\alpha = 1$. Geben Sie eine Schrittweite h an, so dass die j-te Iterierte des expliziten Eulerverfahrens u_j^h sich für $j \to \infty$ wie $u(t)$ verhält, und eine Schrittweite, auf die dies nicht zutrifft.

(b) Berechnen Sie nun für $\alpha = 1$ die ersten vier Iterationsschritte des impliziten Eulerverfahrens mit Schrittweite $h = 2$.

(c) Leiten Sie eine Bedingung für h in Abhängigkeit von α her, so dass das explizite Eulerverfahren mit $j \to \infty$ konvergiert. Interpretieren Sie diese Bedingung in Hinblick auf große Werte von α.

Abgabe: Montag, den 17.06.2019, vor der Vorlesung.