

Übung zur Vorlesung
Numerik für Differentialgleichungen
SS 2019 — Blatt 5

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Leiten Sie hinreichende Bedingungen für die Konsistenz dritter Ordnung eines Runge-Kutta-Verfahrens im Fall autonomer Differenzgleichungen her.

Eine Differentialgleichung heißt autonom, wenn Sie von der Form

$$u^{(n)}(x) = f(u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x))$$

ist.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Konstruieren Sie auf der Basis der Simpson-Regel

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{6} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right)$$

ein Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung $p = 4$.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das durch das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

gegebene Runge-Kutta-Verfahren Konsistenzordnung $p = 3$ hat.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Zeigen Sie durch die Konstruktion polynomieller Lösungen, dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \gamma_l &= 1, \\ \sum_{l=1}^m \gamma_l \alpha_l &= \frac{1}{2}, \\ \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m \gamma_l \beta_{lj} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

notwendige für die Konsistenzordnung $p = 2$ eines Runge-Kutta-Verfahrens sind.

Abgabe: Montag, den 01.07.2019, vor der Vorlesung.

(bitte wenden)