Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

01.07.2019

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2019 — Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Randwertproblem in $u : [a,b] \to \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} u'(t) - A(t)u(t) &= f(t) \qquad t \in [a,b]\,, \\ B_a u(a) + B_b u(b) &= g\,. \end{aligned}$$

Sei $y_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ Lösung von

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= A(t)y_0(t) + f(t) \qquad t \in [a,b]\,, \\ y_0(a) &= 0 \end{aligned}$$

und $y : [a,b] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ Lösung von

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(y) \qquad t \in [a,b]\,, \\ y(a) &= I\,. \end{aligned}$$

Außerdem sei $a \in \mathbb{R}^d$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Q_s := (B_a + B_b y(b))\, s = g - B_b y_0(b)\,.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$u(t) := y_0(t) + y(t)s\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien die Stützstellen $x_i = a + (i-1)h$ für $a \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$ und $h > 0$ gegeben. Berechnen Sie Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und ein maximales $\beta \in \mathbb{N}$, so dass für hinreichend glatte Funktionen u gilt:

$$\sum_{k=i-2}^{i+2} \alpha_k u(x_k) = u^{(4)}(x_i) + o(h^\beta)\,,$$

wobei $u^{(4)}$ die vierte Ableitung von u ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $p \in C^2(\mathbb{R})$, $u \in C^3(\mathbb{R})$ und x_i, $i \in \mathbb{Z}$, seien Stützstellen, mit maximalen Abstand $h > 0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{1}{h^2}\left[p(x_{i+1})\left(u(x_i) - u(x_{x+1})\right) + p(x_i)\left(u(x_i) - u(x_{i-1})\right)\right] = -\left(pu'\right)'(x_i) + o(h)\,.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten den Differenzenoperator

$$L^h u_i := -\frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, N-1\,.$$

Es gelte

$$L^h u_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N-1 \quad \text{und} \quad u_0 \leq 0\,,\, u_N \leq 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$u_i \leq 0 \quad \forall i = 0, \ldots, N\,.$$

Abgabe: Montag, den 15.07.2019, vor der Vorlesung.