Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

20.10.2016

Praktische Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 1

Abgabe: Mittwoch, den 03.11.2016, via eMail

Aufgabe 1 (4 + 4 Punkte)

Wir betrachten die eindimensionale Advektions-Diffusions-Gleichung

$$\begin{cases} \partial_t u + v\,\partial_x u = \epsilon \partial_x^2 u & \text{in } (-1,1)\times(0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } (-1,1), \\ u(-1) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

zu gegebenen Anfangsdaten $u_0 \in C^0([-1,1])$ und $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Wir definieren

$$x_j := -1 + j\,\Delta x,$$
$$t^n := n\,\Delta t$$

mit der Ortsschrittweite $\Delta x = \frac{2}{J}$ bzw. der Zeitschrittweite $\Delta t = \frac{T}{N}$.
Für die numerische Lösung von (1) machen wir den Ansatz

$$u_h(x,t) := \sum_{i=0}^{J} u_i^n\,\varphi_i(x) \quad \text{für } t \in [t^n, t^{n+1}), \tag{2}$$

wobei wir mit $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_J\} \subset C^0([-1,1])$ die Lagrange-Basisfunktionen erster Ordnung bezeichnen, definiert durch

$$\varphi_i|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1([x_j,x_{j+1}]), \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

(a) *bis 27.10.2016:* Geben Sie ein Finite-Elemente-Verfahren zur Bestimmung der Freiheitsgrade $(u_i^n)_{i,n}$ an. Verwenden Sie dazu in der Zeit ein exlizites Euler-Verfahren, d.h. verwenden Sie die Approximation

$$\partial_t u(t^n,\cdot) \approx \frac{u_h(t^{n+1},\cdot) - u_h(t^n,\cdot)}{\Delta t}.$$

Leiten Sie so ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\frac{1}{\Delta t} M(u^{n+1} - u^n) = F(u^n) \quad (n = 0,\ldots,N-1)$$

her mit $u^n = (u_i^n)_i$, $F(u^n) \in \mathbb{R}^{J+1}$ und der Massematrix

$$M = \left(\int_{-1}^{1} \varphi_i\,\varphi_j \right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{(J+1)\times(J+1)}.$$

Werten Sie alle Integrale von Hand exakt aus.
Wie definieren Sie die diskreten Anfangswerte u^0? Wie sind bereits in (2) die Randwerte eingegangen?

(b) Implementieren Sie Ihr Verfahren aus Teil a) zu den Anfangswerten

$$u_0(x) := \begin{cases} -\sin \pi x & \text{für } x \in [-1, 0], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Lösen des linearen Gleichungssystems können Sie, da M symmetrsich, positiv definit und tridiagonal ist, bspw. den *Thomas*-Algorithmus oder ein CG-Verfahren verwenden. Testen sie ihr Verfahren für $v = 0.5$ und verschiede Werte von $\epsilon > 0$.

Thomas-Algorithmus: Sei $(m_i)_{1\ldots N}$ die Hauptdiagonale, $(l_i)_{i=2\ldots N}$ die linke und $(r_i)_{i=1\ldots N-1}$ die rechte Nebendiagonale einer Matrix A, sowie $(b_i)_{i=1\ldots N}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^n$. Die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ ist bestimmt durch

$$r'_i := \begin{cases} \frac{r_i}{m_i} & i = 1 \\ \frac{r_i}{m_i - l_i r'_{i-1}} & i = 2, \ldots, N-1, \end{cases}$$

$$b'_i := \begin{cases} \frac{b_i}{m_i} & i = 1 \\ \frac{b_i - l_i b'_{i-1}}{m_i - l_i r'_{i-1}} & i = 2, \ldots, N-1, \end{cases}$$

$$x_i := \begin{cases} b'_i & i = N \\ b'_i - r'_i x_{i+1} & i = N-1, \ldots, 1. \end{cases}$$