Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte 04.11.2016

Praktische Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 2

Abgabe: Mittwoch, den 17.11.2016, via eMail

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $f(u) = vu$, $v > 0$. Wir betrachten die skalare Transportgleichung

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0 && \text{in } (a,b)\times(0,T), \\ u(\cdot,0) &= u_0 && \text{in } (a,b), \\ u(a,t) &= c(t) && \text{für } t \in [0,T] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

zu gegebenen Anfangsdaten $u_0 \in L^\infty$ und Randdaten $c(t) := u_0(a - vt)$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Lösung dieses Problems durch $u(x,t) = u_0(x - vt)$ gegeben ist.

Zur Diskretisierung des Anfangsrandwerproblems (1) wählen wir ein Gitter mit Gitterweiten $\Delta x := (b-a)/N$, $\Delta t := T/M$ und Zellen

$$Q_i^n := [x_i, x_{i+1}) \times [t^n, t^{n+1}) \qquad (x_i = a + i\Delta x).$$

Eine stückweise konstante Funktion über diesem Gitter ist von der Form $u_h(x,t) = u_i^n$ für $(x,t) \in Q_i^n$. Mittels der Anfangsdaten definieren wir

$$u_i^0 := \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_0(x)\,\mathrm{d}x \qquad (0 \le i \le N).$$

Zur Bestimmung der weiteren Werte untersuchen wir die folgenden Finite-Differenzen Diskretisierungen ($0 \le i \le N$,$0 \le n \le M$):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + v\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \tag{FTBS}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + v\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, \tag{FTFS}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + v\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0. \tag{FTCS}$$

(a) *bis 10.11.2016:* Zeigen Sie, dass sich die oben definierten Finite-Differenz-Verfahren in Erhaltungsform schreiben lassen, d.h. es gibt einen numerischen Fluss $g \in C^{(0,1)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ mit $g(u,u) = f(u)$, so dass

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)\right)$$

Überlegen Sie sich außerdem wie sie diskrete Randdaten für obige Verfahren definieren können.

(b) Implementieren Sie die obigen drei Finite-Differenzen-Verfahren. Implementieren Sie dazu ein allgemeines Verfahren in Erhaltungsform, in dem Sie den numerischen Fluss wählen können. Verwenden Sie eine Mittelpunktsquadratur zum Auswerten der Integrale.