Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

17.11.2016

Praktische Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 3

Abgabe: Mittwoch, den 01.12.2015, via eMail

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Wir betrachten die Burgersgleichung

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0 \quad \text{in } (-1,1) \times (0,T), \\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } (-1,1), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

mit Riemann-Anfangsdaten

$$u_0(x) := \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

(a) *bis 24.11.2016:* Ändern Sie Ihre Implementierung von Blatt 2 derart ab, dass in den numerischen Flüssen $g(v,w)$ ein allgemeiner analytischer Fluss f gewählt werden kann. Wenden Sie dann die drei Finite-Differenzen-Verfahren von Blatt 2 auf obiges Problem. Als Randwerte setzen Sie die Daten am Rand Konstant fort. Testen Sie ihre Implementierung für die Anfangswerte $\{u_l = 1, u_r = 0\}$, $\{u_l = 0, u_r = 1\}$ und für verschiedene Werte mit $u_l > 0$, $u_r < 0$. Für welche Wahl von Anfangsdaten funktionieren welche Verfahren, d.h. liefern eine Approximation der jeweiligen Entropielösung?

(b) Implementieren Sie den Lax-Friedrichs-Fluss

$$g_{LF}(v,w) = \frac{1}{2}\big(f(v) + f(w)\big) + \frac{\lambda}{2}(v - w)$$

und den Engquist-Osher-Fluss

$$g_{EO}(v,w) = \int_0^v \max\{f'(s), 0\}\, ds + \int_0^w \min\{f'(s), 0\}\, ds + f(0)$$

für die Burgers-Gleichung. Testen Sie Ihre Implementierung für die gleichen Wahlen von u_l und u_r wie in Teil (a).