Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

17.10.2016

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 1

Abgabe: Montag, den 24.10.2016, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ betrachten wir die folgende Differentialgleichung in einer Raumdimension

$$\begin{aligned} \partial_t u + x\,\partial_x u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,T[, \\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Charakteristiken und geben Sie eine Lösung des Anfangswertproblems an. Begründen Sie, warum man bei diesem Beispiel i.A. nicht von Erhaltungsgleichungen sprechen kann.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $v \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem für die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + v\partial_x u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[, \\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

eine klassische Lösung besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangsrandwertproblem für die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + v\partial_x u &= 0 && \text{in }]a,b[\times]0,\infty[, \\ u(\cdot,0) &= u_0 && \text{in }]a,b[, \\ u(a,\cdot) &= u_0(a) && \text{in }]0,\infty[, \\ u(b,\cdot) &= u_0(b) && \text{in }]0,\infty[\end{aligned}$$

genau dann eine klassische Lösung besitzt, wenn $v = 0$ oder u_0 konstant ist.

Aufgabe 3 (Transformation klassischer Lösungen) (4 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $f'' > 0$ und sei u eine klassische Lösung von

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[.$$

Zeigen Sie, dass dann $v := f'(u)$ eine klassische Lösung der Burgers-Gleichung

$$\partial_t v + v\,\partial_x v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[$$

ist. Zeigen Sie ferner, dass sich diese Aussage nicht auf schwache Lösungen überträgt.

Aufgabe 4 (Transformation der Euler-Gleichungen) (4 Punkte)

Die Euler-Gleichungen der Gasdynamik lauten

$$\begin{aligned}
\partial_t\rho + \partial_x(\rho\, v) &= 0, && \text{(Massenerhaltung)}\\
\partial_t(\rho\, v) + \partial_x(\rho\, v^2 + p) &= 0, && \text{(Impulserhaltung)}\\
\partial_t E + \partial_x[(E+p)\, v] &= 0, && \text{(Energieerhaltung)}
\end{aligned}$$

wobei ρ die Dichte, v die Geschwindigkeit, p der Druck und E die Gesamtenergie ist. Für ein polytropisches Gas gilt

$$E = \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \frac{p}{\gamma - 1}$$

mit einer Konstanten $\gamma > 1$.

(a) Zeigen Sie: Falls ρ, v und p glatt sind, so sind die Eulergleichungen äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\partial_t\rho + \partial_x(\rho\, v) &= 0,\\
\partial_t v + v\,\partial_x v + \frac{\partial_x p}{\rho} &= 0,\\
\partial_t p + \rho\, a^2\,\partial_x v + v\,\partial_x p &= 0,
\end{aligned} \qquad (*)$$

wobei $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ ist.

(b) Die Entropie S ist gegeben durch

$$S = S_0 + c_v\,\log\left(\frac{p}{\rho^\gamma(\gamma-1)}\right)$$

mit Konstanten S_0 und c_v.
Zeigen Sie, dass die dritte Gleichung in $(*)$ äquivalent ist zu

$$p\,(\partial_t S + v\,\partial_x S) = 0.$$