Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

24.10.2016

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 2

Abgabe: Montag, den 07.11.2016, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Sprungbedingung für die Entropie) (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und werde $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ durch eine glatte Kurve $S : t \to (\sigma(t), t)$ in M_l und M_r zerlegt, d.h. $\overline{M_l} \cap \overline{M_r} = S$ und $\mathbb{R}\times]0,\infty[= \overline{M_r} \cup \overline{M_l}$. Sei $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$, sodass $u_l := u_{|M_l} \in C^1(\overline{M}_l)$ und $u_r := u_{|M_r} \in C^1(\overline{M}_r)$ und u_l, u_r erfüllen die Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{CL}$$

in M_l bzw. M_r im klassischen Sinne. Dann ist u genau dann Entropielösung von (CL), wenn für alle Entropiepaare (U, F) für (CL) gilt:

$$F\big(u_l(\sigma(t),t)\big) - F\big(u_r(\sigma(t),t)\big) \geq \sigma'(t)\,\big[U\big(u_l(\sigma(t),t)\big) - U\big(u_r(\sigma(t),t)\big)\big].$$

Aufgabe 2 (Riemannproblem für die Burgers-Gleichung) (4 Punkte)
Betrachten Sie das Riemannproblem für die Burgers-Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u\,\partial_x u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[, \\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned} \tag{$*$}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0, \\ u_r & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Entropielösung von $(*)$, falls

(a) $u_l < u_r$, (b) $u_l = u_r$, (c) $u_l > u_r$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ und es gelte für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ferner existiere eine strikt konvexe Funktion $U \in C^2(\mathbb{R})$, sodass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \geq 0$, gilt:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} U(u(x,t))\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \int_{\mathbb{R}^2} U(u_0(x))\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t \int_K |u(x,t) - u_0(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.$$

Aufgabe 4 (stationäre Lösungen der Burgers-Gleichung) (4 Punkte)
Finden Sie eine stationäre, nichtkonstante Entropielösung der Burgers-Gleichung

$$\partial_t u + u \, \partial_x u = 0.$$

Dabei heißt eine Lösung u stationär, wenn $u(x, \cdot)$ für fast jedes x konstant ist.