Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

07.11.2016

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 3

Abgabe: Montag, den 14.11.2016, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Viskositätslimes für die Transportgleichung) (6 Punkte)

Sei u die Entropielösung des Anfangswertproblems für die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + a\,\partial_x u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[,\\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $a \neq 0$ und Riemann-Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0,\\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$u_\epsilon(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\epsilon\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y-at)^2}{4\epsilon t}} u_0(y)\,\mathrm{d}y$$

eine klassische Lösung des regularisierten Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u + a\,\partial_x u &= \epsilon\,\partial_x^2 u \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[,\\ u(\cdot,0) &= u_0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} |u_\epsilon(x,t) - u(x,t)|\,\mathrm{d}x \leq C\sqrt{\epsilon t}$$

ist, wobei die Konstante C unabhängig von ϵ und t ist.

Aufgabe 2 (Schocks bei konkavem Fluss) (4 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ strikt konkav. Betrachten Sie das Riemann-Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[,\\ u(x,0) &= \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0,\\ u_r & \text{für } x > 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{RP}$$

mit $u_l \neq u_r$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) := \begin{cases} u_l & \text{für } x < st,\\ u_r & \text{für } x > st \end{cases}$$

mit $s = \frac{f(u_l)-f(u_r)}{u_l-u_r}$ genau dann die Entropielösung von (RP) ist, wenn $u_l < u_r$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ strikt konvex, sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ und sei $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$ schwache Lösung von

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[, u(\cdot,0) \quad = u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass u genau dann die Entropielösung ist, wenn die Oleinik-Entropiebedingung gilt, d.h., wenn eine Konstante $C \geq 0$ existiert, sodass für fast alle $x \in \mathbb{R}$ und fast alle $t, h > 0$ gilt:

$$\frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \leq \frac{C}{t}.$$