Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

14.11.2016

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 4

Abgabe: Montag, den 21.11.2016, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Kružkov-Entropiebedingung) (4 Punkte)
Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[, \\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{A1.1}$$

Die Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$ erfülle die Kružkov-Entropiebedingung, d.h. für alle $k \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$, $\varphi \geq 0$, gilt:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |u-k|\,\partial_t\varphi + \operatorname{sgn}(u-k)\big[f(u)-f(k)\big]\,\partial_x\varphi \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)-k|\,\varphi(x,0)\,\mathrm{dx} \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass u eine schwache Lösung von (A1.1) ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $g \in C^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ ein konsistenter numerischer Fluss, d.h. $g(u,u) = f(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}$. Sei $(u_i^0)_{i\in\mathbb{Z}} \in l_1$ eine Folge von Anfangswerten und seien $\Delta t, \Delta x > 0$. Die Folge $(u_i^{n+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ sei gegeben durch

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)),$$

Zeigen Sie:

$$\big(g_{i+\frac{1}{2}}^n\big)_{i\in\mathbb{Z}} := \big(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - f(0)\big)_{i\in\mathbb{Z}} \in l_1 \quad \text{und} \quad \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i^n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i^{n+1}.$$

Aufgabe 3 (Konsistenz) (4 Punkte)
Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$ eine klassische Lösung der Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[.$$

Sei g ein glatter numerischer Fluss, der konsistent mit f ist, d.h. $g(u,u) = f(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}$. Ferner sei $x_j := j\Delta x$, $t_n := n\Delta t$ und $u_j^n := u(x_j, t_n)$. Zeigen Sie, dass

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}[g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)] = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

gilt.

Aufgabe 4 (Numerische Viskosität) (4 Punkte)

Zur numerischen Lösung der Transportgleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[,$$

wobei $a > 0$ ist, verwenden wir das Upwind-Verfahren

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n). \tag{A4.2}$$

Bestimmen Sie den Diffusionskoeffizienten $\epsilon > 0$ in der Gleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = \epsilon\partial_x^2 u \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[$$

so, dass das Verfahren (A4.2) bezüglich dieser Gleichung konsistent von der Ordnung 2 ist.