Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

21.11.2016

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 5

Abgabe: Montag, den 28.11.2016, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Wendroff. Ferner sei (U, F) ein Entropiepaar und sei $G \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ ein numerischer Fluss, der konsistent mit F ist, sodass gilt:

$$U(u_i^{n+1}) \leq U(u_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[G\big(u_{i+1}^n, u_i^n\big) - G\big(u_i^n, u_{i-1}^n\big)\right].$$

Dann erfüllt der Grenzwert u die für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$, $\varphi \geq 0$, die Entropiebedingung

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left[U(u)\,\partial_t\varphi + F(u)\,\nabla\varphi\right] \geq 0.$$

Aufgabe 2 (Funktionen von beschränkter Variation) (4 Punkte)

Die Totalvariation einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$TV_{[a,b]}(f) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{a=x_0<\ldots<x_n=b} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{BV}([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid TV_{[a,b]}(f) < \infty\}$ ist ein Vektorraum.

(b) Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist von beschränkter Variation.

(c) Die Totalvariation einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist, als Mengenfunktion aufgefasst, additiv, d.h. für $a \leq c \leq b$ gilt:

$$TV_{[a,b]}(f) = TV_{[a,c]}(f) + TV_{[c,b]}(f).$$

(d) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so sind die Funktionen $\pi, \nu : [a, b] \to \mathbb{R}$, die durch

$$\pi(x) := TV_{[a,x]}(f) \qquad\qquad \nu(x) := \pi(x) - f(x)$$

definiert sind, monoton wachsend.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $g \in BV([a,b]) \cap L^1(]a,b[)$ eine Funktion von beschränkter Variation. Wir setzen g auf ganz $\mathbb{R}$ fort durch

$$g(x) = \begin{cases} g(a) & \text{falls } x < a, \\ g(b) & \text{falls } x > b. \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgende Identität:

$$TV_{[a,b]}(g) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)| \mathrm{dx}.$$

Hinweis: Approximieren Sie $g \in L^1(]a,b[)$ durch eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1([a,b])$.

Aufgabe 4 (Der Helly'sche Auswahlsatz) (4 Punkte)
Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Funktionen auf $[a,b]$ mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_\infty \leq C$. Zeigen Sie:

(a) Zu jeder abzählbaren Menge $E \subset [a,b]$ existiert eine Teilfolge, die in jedem Punkt von E konvergiert.

(b) Sind alle Funktionen f_k monoton wachsend, so gibt es eine Teilfolge, die punktweise gegen eine monoton wachsende Funktion f konvergiert.

(c) Gilt $\sup_{k\in\mathbb{N}} TV_{[a,b]}(f_k) \leq C$, so existiert eine Teilfolge, die punktweise gegen eine Funktion $f \in BV([a,b])$ konvergiert.