Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

28.11.2016

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 6

Abgabe: Montag, den 05.12.2016, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $1 \le p \le \infty$. Zeigen Sie, dass $BV([-1,1]) \not\subset H^{1,p}(]-1,1[)$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $u \in BV(\mathbb{R})$ und sei $\Delta x > 0$ sei

$$u_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x)\, dx.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$TV\big((u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) \le TV_{\mathbb{R}}(u).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und sei g ein numerischer Fluss der Form

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\big(f(u) + f(v)\big) + \frac{1}{2} q(u,v)\,(u-v).$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)\right]$$

TVD ist, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\left|\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n}\right| \le q(u_j^n, u_{j+1}^n) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} q(u_j^n, u_{j+1}^n) \le 1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Betrachten wir den numerischen Fluss

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\big(f(u) + f(v)\big) + \frac{1}{2}\left|\frac{f(v) - f(u)}{v-u}\right|(u-v).$$

Zeigen Sie:

(a) Unter der CFL-Bedingung

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left|\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n}\right| \le 1$$

ist das zugehörige Verfahren TVD.

(b) Jedoch approximiert es im allgemeinen für keine Wahl von Δt die Entropielösung.