Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

05.12.2016

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 7

Abgabe: Montag, den 12.12.2016, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass sowohl das Engquist-Osher-Verfahren als auch das Lax-Friedrichs-Verfahren unter einer CFL-Bedingung monoton ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $u \in BV(\mathbb{R})$ und $\Delta x > 0$ und definiere $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ durch

$$u_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x)\,dx.$$

Zeigen Sie folgende Abschätzung für die Totalvariation:

$$TV\big((u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) \le TV_{\mathbb{R}}(u).$$

Aufgabe 3 (Darstellung des Lax-Friedrichs Verfahrens) (4 Punkte)
Sei $(u_j^0)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine Diskretisierung der Anfangsdaten und seien $(u_j^{n+1})_{j\in\mathbb{Z}}$ durch das Lax-Friedrichs Verfahren für die Erhaltungsgleichung unter der CFL-Bedingung $\frac{\Delta t}{\Delta x}\sup|f'| \le 1$ gegeben.
Wir definieren r_j^n als die Lösung des Riemannproblems

$$\begin{aligned} \partial_t r_j^n + \partial_x f(r_j^n) &= 0 \qquad && \text{in } \mathbb{R}\times]0,\Delta t], \\ r_j^n(\cdot,0) &= \begin{cases} u_{j-1}^n & \text{falls } x<0, \\ u_{j+1}^n & \text{falls } x>0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie folgende Darstellung:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} r_j^n(x,\Delta t)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 (E-Verfahren) (4 Punkte)
Ein numerisches Verfahren in Erhaltungsform heißt E-Verfahren, falls gilt:

$$\operatorname{sgn}(w-v)\big[g(v,w)-f(k)\big] \le 0 \quad \text{für alle } k\in[v,w],$$

wobei $[v,w] := \{\alpha v + (1-\alpha)w | \alpha\in[0,1]\}$.
Zeigen Sie: Ist g ein konsistenter, monotoner numerischer Fluss, so ist das zugehörige Verfahren ein E-Verfahren.