Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

12.12.2016

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 8

Abgabe: Montag, den 19.12.2016, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ gegeben durch $f_\epsilon(x) = \min\{1, \max\{-1, -\epsilon^{-1}x\}\}$. Zeigen Sie für $\epsilon < C$:

(a) Die Folge $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ ist beschränkt in $H^{1,1}(]-1,1[)$.

(b) Die Folge $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ ist nicht beschränkt in $H^{1,2}(]-1,1[)$.

(c) Die Folge $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ konvergiert nicht stark in $H^{1,1}(]-1,1[)$.

(d) Die Folge $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ konvergiert nicht schwach in $H^{1,1}(]-1,1[)$.

(e) Die Folge $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ konvergiert in $L^1(]-1,1[)$ gegen eine Funktion f und die Totalvariation von f_ϵ konvergiert gegen die Totalvariation von f.

Aufgabe 2 (Beschränktheit für implizite Verfahren) (4 Punkte)

Sei $g \in C^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ein monotoner numerischen Fluss. Zeigen Sie für das implizite Verfahren

$$u_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[g(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}) - g(u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1})\right] = u_j^n$$

die Abschätzung $\sup_{j\in\mathbb{Z}}|u_j^{n+1}| \le \sup_{j\in\mathbb{Z}}|u_j^n|$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge. Weiter sei E eine Eigenschaft, sodass höchstens ein Element $x \in X$ existiert, das die Eigenschaft E hat.

Zeigen Sie: Besitzt der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaft E, so konvergiert die ganze Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in X$, das die Eigenschaft E besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Im Fall der linearen Transportgleichung

$$\partial_t u + a\,\partial_x u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[$$

mit $a > 0$ betrachten wir das Verfahren von Warming und Beam:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{a}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1 - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(u_i^n - 2\,u_{i-1}^n + u_{i-2}^n).$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren von 2. Ordnung konsistent ist.