Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

19.12.2016

Übung zur Vorlesung

# Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 9

**Abgabe:** Montag, den 09.01.2017, vor der Vorlesung.

**Aufgabe 1** (6 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,T[,\\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ein numerisches Verfahren für die Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}^n - 2\,u_i^n + u_{i-1}^n\right],\\ u_i^0 &= \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x)\,dx. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Diskretisierung konsistent und unter einer geeigneten CFL-Bedingung stabil bzgl. der $L^\infty$-Norm ist. Folgern Sie aus dem Satz von Lax eine Fehlerabschätzung für das Verfahren.

**Aufgabe 2** (6 Punkte)

Wir betrachten die lineare Advektions-Diffusionsgleichung

$$\partial_t u + v\,\partial_x u - \epsilon\,\partial_x^2 u = 0.$$

Betrachten Sie folgende Diskretisierungen:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[u_i^n - u_{i-1}^n\right] + \epsilon\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}^n - 2\,u_i^n + u_{i-1}^n\right],\\ u_i^{n+1} &= u_i^n - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right] + \epsilon\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}^n - 2\,u_i^n + u_{i-1}^n\right],\\ u_i^{n+1} &= u_i^n - a\,\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right] + \epsilon\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}^n - 2\,u_i^n + u_{i-1}^n\right], \end{aligned}$$

All diese Diskretisierungen sind von der Form $u^{n+1} = Q(S_+, S_-)\,u^n$. Prüfen Sie mit Hilfe des Symbols von $Q$, unter welchen Bedingungen an $a$, $\epsilon$ und $\Delta t$ die Diskretiserungen für gegebenes $\Delta x$ stabil bzgl. der $L^2$-Norm sind.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Betrachten wir die Transportgleichung

$$\partial_t u + v\,\partial_x u = 0.$$

Untersuchen Sie das Verfahren von Lax-Wendroff

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{a}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1 - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(u_{i+1}^n - 2\,u_i^n + u_{i-1}^n).$$

und das Verfahren von Warming und Beam

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{a}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1 - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(u_i^n - 2\,u_{i-1}^n + u_{i-2}^n).$$

auf Stabilität bzgl. der $L^2$-Norm.

**Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!**