Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

09.01.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 10

Abgabe: Montag, den 16.01.2017, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten die lineare Transportgleichung

$$\partial_t u + a\,\partial_x u = 0.$$

Sei $x_j := j\Delta x$, sei $(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$ gegeben und werde $(u_j^{n+1})_{j\in\mathbb{Z}}$ durch das Lax-Wendroff Verfahren berechnet. Weiter sei $p_j^n \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ das quadratische Lagrange-Interpolationspolynom zu (x_{j-1}, u_{j-1}^n), (x_j, u_j^n) und (x_{j+1}, u_{j+1}^n).

Zeigen Sie, dass

$$u_j^{n+1} = p_j^n(x_j - a\Delta t)$$

ist und geben Sie ein Gegenbeispiel für folgende Aussage an:

$$u_j^{n+1} \in \operatorname{conv}\{u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Limiter:

$$\varphi(r) = \frac{|r| + r}{1 + |r|} \quad \text{(van Leer)},$$
$$\varphi(r) = \frac{r^2 + r}{1 + r^2} \quad \text{(van Albada)},$$

Zeigen Sie, dass diese Limiter in der Sweby-Region liegen, d.h. dass gilt:

$$\begin{array}{rcccll} & & \varphi(r) & = & 0 & \text{falls } r \le 0, \\ r & \le & \varphi(r) & \le & \min\{2r, 1\} & \text{falls } 0 \le r \le 1, \\ 1 & \le & \varphi(r) & \le & \min\{r, 2\} & \text{falls } 1 \le r. \end{array}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Finden Sie, eine symmetrische Darstellung der Funktion $\psi(a, b) = \varphi(\frac{a}{b})b$, falls φ der van Leer Limiter oder der van Albada Limiter ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $L_j^n, R_j^n : \mathbb{P}_1([x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}])$ lineare Rekonstruktionen aus den Daten $(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$ in der Zelle $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$. Ferner sei das Verfahren

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[g\big(L_j^n(x_{j+\frac{1}{2}}), R_{j+1}^n(x_{j+\frac{1}{2}})\big) - g\big(L_{j-1}^n(x_{j-\frac{1}{2}}), R_j^n(x_{j-\frac{1}{2}})\big)\right]$$

TVD. Zeigen Sie, dass dann das zugehörige Heun Verfahren

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[g\big(L_j^n(x_{j+\frac{1}{2}}), R_{j+1}^n(x_{j+\frac{1}{2}})\big) - g\big(L_{j-1}^n(x_{j-\frac{1}{2}}), R_j^n(x_{j-\frac{1}{2}})\big)\right],\\
u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(\tilde{u}_j^{j+1} + u_j^n) - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[g\big(\tilde{L}_j^{n+1}(x_{j+\frac{1}{2}}), \tilde{R}_{j+1}^{n+1}(x_{j+\frac{1}{2}})\big) - g\big(\tilde{L}_{j-1}^{n+1}(x_{j-\frac{1}{2}}), \tilde{R}_j^{n+1}(x_{j-\frac{1}{2}})\big)\right].
\end{aligned}$$

ebenfalls TVD ist.