Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

16.01.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 11

Abgabe: Montag, den 23.01.2017, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ein monotoner, konsistenter numerischer Fluss und sei

$$L_j^n(x) = u_j^n + minmod\Big(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}\Big),$$

wobei

$$minmod(a,b) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a)\ \min\{|a|,|b|\}, & \text{falls } a\,b \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\frac{g\big(L_j^n(x_{j+\frac{1}{2}}), L_{j+1}^n(x_{j+\frac{1}{2}})\big) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n} \geq \frac{g(u_j^n, u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n},$$
$$\frac{g\big(L_{j-1}^n(x_{j-\frac{1}{2}}), L_j^n(x_{j-\frac{1}{2}})\big) - f(u_j^n)}{u_{j-1}^n - u_j^n} \leq \frac{g(u_{j-1}^n, u_j^n) - f(u_j^n)}{u_{j-1}^n - u_j^n}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 1 betrachten wir das Verfahren

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[g\big(L_j^n(x_{j+\frac{1}{2}}), L_{j+1}^n(x_{j+\frac{1}{2}})\big) - g\big(L_{j-1}^n(x_{j-\frac{1}{2}}), L_j^n(x_{j-\frac{1}{2}})\big)\Big]. \qquad (*)$$

Zeigen Sie, dass dieses Verfahren unter einer geeigneten CFL-Bedingung monoton und TVD ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und sei $u_0 \in BV(\mathbb{R})$. Zu einer Folge $(\Delta x_k, \Delta t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Orts- und Zeitschrittweiten, seien approximative Lösungen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch das Verfahren $(*)$ unter Berücksichtigung der CFL-Bedingung berechnet. Zeigen Sie, dass u_k gegen die Entropielösung u von

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times[0,T], \\ u(\cdot,0) &= u_0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

konvergiert.