Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

23.01.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 12

Abgabe: Montag, den 30.01.2017, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 + \frac{1}{2}\partial_y u^2 &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0,\infty[, \\ u(\cdot,\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Für $u_l, u_r \in \mathbb{R}$ seien die Anfangsdaten $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch

$$u_0(x,y) := \begin{cases} u_l, & \text{falls } x < y, \\ u_r, & \text{falls } x > y. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $u(x,y,t) := u_0(x,y)$ die Entropielösung des Problems $(*)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ und sei $u^n_{\Delta x}$ durch ein Dimensional Splitting Verfahren berechnet. Zeigen Sie

$$\|u^n_{\Delta x}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Delta x \in \mathbb{R}^d$, sei $\tau_j(x) = x + \Delta x_j\, e_j$ und sei $u_{\Delta x} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stückweise konstante Funktionen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$TV_{\mathbb{R}^d}(u_{\Delta x}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{\Delta x_j} \|u_{\Delta x} \circ \tau_j - u_{\Delta x}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Zu $u \in BV(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, existiert eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \|u - u_k\|_{L^1(\Omega)} &\xrightarrow{k\to\infty} 0, \\ TV(u_k) &\xrightarrow{k\to\infty} TV(u). \end{aligned}$$