Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

30.01.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen

WS 2016/17 — Blatt 13

Abgabe: Montag, den 06.02.2017, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zu einer Funktion $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$ sei $g[\tilde{f}] \in C^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ ein konsistenter numerischer Fluss, sodass

$$g[\tilde{f}](u,v) = -g[-\tilde{f}](v,u) \quad \text{und} \quad \|\nabla g[\tilde{f}]\|_\infty \leq C\|\tilde{f}'\|_\infty. \tag{$**$}$$

Ferner sei $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Triangulierung des $\mathbb{R}^2$ und $\alpha(j,l)$ und $\nu_{j,l}$ seien wie in der Vorlesung definiert.
Zeigen Sie, dass $g_{j,\alpha(j,l)} := g[\nu_{j,l} f]$ die folgenden Bedingungen für alle $u, u', v, v' \in \mathbb{R}$ erfüllt:

(a) $|g_{j,\alpha(j,l)}(u,v) - g_{j,\alpha(j,l)}(u',v')| \leq C\big(|u-u'| + |v-v'|\big)$,

(b) $g_{j,\alpha(j,l)}(u,v) = -g_{\alpha(j,l),j}(v,u)$,

(c) $g_{j,\alpha(j,l)}(u,u) = \nu_{j,l} f(u)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Berechnen Sie mit der Methode der Charakteristiken die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$u_t + \operatorname{div}(vu) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,T) \quad \text{und } u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$

dabei sei v ein divergenzfreies, glattes Geschwindigkeitsfeld.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie Schwerpunkt und Durchmesser der Pyramiden, die durch die folgenden Punkte gegeben sind:

P_1 : Grundfläche $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0)$ Spitze$(0,0,1)$
P_2 : Grundfläche $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ Spitze$(0,0,1)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $F : \hat{T} \to T$ eine affine Abbildung des Einheitssimplex $\hat{T}$ auf ein Simplex T mit korrespondierenden Seitenflächen $\hat{e}_i$ bzw. e_i. Zeigen Sie, dass sich die äußere Normale ν_i an e_i mit Länge $|\nu_i| = |e_i|$ wie folgt berechnen läßt:

$$\nu_i = \frac{DF^{-T} \cdot \hat{\nu}_i}{|DF^{-T}|},$$

wobei ν_i die äußere Normale zu $\hat{e}_i$ mit der Länge $|\nu_i| = |\hat{e}_i|$ und DF die Jacobymatrix von F bezeichnet.