Aufgabe4

November 22, 2017

1 Aufgabe 4

1.1 Ziel

Sei $\Omega = [0,1]^2$, sei $\mathcal{G}$ ein Dreiecksgitter für Ω und sei $X_{\mathcal{G}}$ der Raum der stückweise linearen Funktionen auf $\mathcal{G}$, d.h.

$$X_{\mathcal{G}} = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) \;\middle|\; u_{|T} \in \mathcal{P}_1(T)\, \forall T \in \mathcal{G} \right\},$$

wobei $\mathcal{P}_1(T)$ den Raum der linearen Polynome auf T bezeichnet.

Implementieren Sie die L2-Projektion in $\Pi_{X_{\mathcal{G}}} : L^2(\Omega) \to X_{\mathcal{G}}$ gegeben durch

$$\int_{\Omega} \Pi_{X_{\mathcal{G}}}(u)\, \varphi = \int_{\Omega} u\, \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in X_{\mathcal{G}}.$$

Approximieren Sie die Integrale durch geeignete Quadraturen.

Implementieren Sie hierzu die Auswertung der lokalen Basisfunktionen auf einem Element $T \in \mathcal{T}$. Dabei können Sie die affine Äquivalenz von T zum Referenzelement $\hat{T}$ verwenden. Visualisieren Sie Interpolation auf einem Gitter mit $4 \cdot 4 \cdot 2$ Dreiecken.

Berechnen Sie dann den L^2-Fehler

$$e_h^2 := \int_{\Omega} |u - \Pi_{X_{\mathcal{G}}}(u)|^2$$

mit Hilfe einer Quadratur der Ordnung 4 zu approximieren. Interpolieren Sie nun die Funtion u auf drei (globale) Verfeinerungen des Gitters und berechnen Sie die experimentelle Konvergenzordnung. Verwenden Sie dabei für die Gitterweite h die maximale Kantenlänge.

Testen Sie Ihre Implementierung, an folgenden Funtionen interpolieren:

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi y) \\
u_2(x,y) &= \left|(x,y) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\right|^2 \\
u_3(x,y) &= \chi_{B_{\frac{3}{11}}(\frac{5}{11},\frac{5}{11})}(x,y)\left(\tfrac{3}{11} - \left|(x,y) - (\tfrac{5}{11}, \tfrac{5}{11})\right|\right)
\end{aligned}$$

2 Lösung