Aufgabe6

January 17, 2018

1 Aufgabe 6

1.1 Ziel

Sei $\Omega = [0,1]^2$. Wir betrachten das inhomogene Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

zu gegebenen f und Randwerten g.

Sei $\mathcal{G}$ ein Dreiecksgitter für Ω und sei $X_{\mathcal{G}}$ der Raum der stückweise linearen Funcktionen auf $\mathcal{G}$, d.h.

$$X_{\mathcal{G}} = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) \;\middle|\; u_{|T} \in \mathcal{P}_1(T)\, \forall T \in \mathcal{G} \right\},$$

wobei $\mathcal{P}_1(T)$ den Raumd er linearen Polynome auf T bezeichnet.

Lösen sie die diskrete schwache Form obigen Problems gegeben durch

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in X_{\mathcal{G}}.$$

Approximieren Sie die Integrale durch geeignete Quadraturen.

Implementieren Sie hierzu die Auswertung des Gradienten der lokalen Basisfunktionen auf einem Element $T \in \mathcal{G}$. Visualisieren Sie die Lösung u_h auf einem Gitter mit $4 \cdot 4 \cdot 2$ Dreiecken.

Berechnen Sie dann den approximativen L^2-Fehler

$$e_h^2 := \int_\Omega |u - u_h|^2$$

mit Hilfe einer Quadratur der Ordnung 4. Berechnen Sie nun die Lösungen u_h auf drei (globalen) Verfeinerungen des Gitters und berechnen Sie die experimentelle Konvergenzordnung. Verwenden Sie dabei für die Gitterweite h die maximale Kantenlänge.

Testen Sie Ihre Implementierung mit rechten Seiten f und g, sodass:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \sin(\pi x)\ \sin(\pi y) \\ u_2(x,y) &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

jeweils die Lösung des Poisson-Problem ist.