Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

16.10.2017

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 1

Abgabe: Montag, den 23.10.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und seien $u, v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $w : \Omega \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar.

$$\operatorname{div} u := \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} u_j, \qquad \operatorname{rot} u := \big(\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1\big),$$

$$\operatorname{grad} w := \big(\partial_{x_1} w, \partial_{x_2} w, \partial_{x_3} w\big), \qquad \Delta u := \big(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3\big)$$

Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div} \operatorname{grad} w = \Delta w$, (b) $\operatorname{div}(u \times v) = v \cdot \operatorname{rot} u - u \cdot \operatorname{rot} v$,

(c) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} w = 0$, (d) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} u = \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \Delta u$,

(e) $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$.

Aufgabe 2 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten) (4 Punkte)

Sei $v(r, \varphi) = u(x, y)$ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

(a) Zeigen Sie folgende Identität:

$$\Delta u = \partial_r^2 v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v.$$

(b) Sei nun $v(r, \varphi) = r\sin\varphi$. Zeigen Sie, dass dann u folgende Problem löst:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } B_1(0), \\ u(1, \varphi) &= \sin\varphi && \text{für } \varphi \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

wobei $B_1(0) = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x| < 1\big\}$.

Aufgabe 3 (Grundlösung des Laplace-Operators) (4 Punkte)

Sei $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Einheitssphäre und bezeichne $|\mathbb{S}^n|$ ihren Flächeninhalt. Für $n \geq 2$ sei die Funktion $s_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x|, & \text{falls } n = 2, \\ -\frac{1}{|S^{n-1}|} \frac{1}{2-n} |x|^{2-n}, & \text{falls } n > 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\Delta s_n = 0$ in punktweise $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Aufgabe 4 (Explizite Lösung der Wärmeleitungsgleichung) (4 Punkte)
Sei $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$, sodass $|u_0(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) \mathrm{d}y$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u - \partial_x^2 u & = & 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{in } \mathbb{R} \end{array}$$

ist. Dabei ist $u(x,0)$ als Fortsetzung von u zu verstehen, d.h. $u(x,0) = \lim_{t \downarrow 0} u(x,t)$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}$ gilt.