Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

23.10.2017

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 2

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 30.10.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)^T$ und das Kugelsegment $G := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 2, x_1 > 1\}$. Es bezeichne $\nu(x)$ die äußere Normale an G in Punkt x. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial G} f(x) \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}\sigma(x)$$

(a) gemäß der Definition des Oberflächenintegrals,

(b) mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes.

Aufgabe 2 (Kelvin-Transformation) (4 Punkte)

Sei $n \geq 3$, $R > 0$, $u \in C^2\big(B_R(0)\big)$ und

$$v(y) := \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{R^2 y}{|y|^2}\right), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}.$$

Zeigen Sie: Falls $\Delta u = 0$ in $B_R(0)$, so ist $\Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$.

Aufgabe 3 (Green'sche Formeln) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand und seien $u, v \in C^2\big(\overline{\Omega}\big)$. Beweisen Sie die Green'schen Formeln

(a) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma(x),$

(b) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \partial_\nu v \,\mathrm{d}\sigma(x),$

(c) $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v - v\partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma(x).$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Seien $u \in C^2\big(\mathbb{R}\times]0,\infty[\big)$, $v, \tau \in C^1\big(\mathbb{R}\times]0,\infty[\big)$. Zeigen Sie, dass die nichtlineare Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \partial_x p(\partial_x u) = 0$$

äquivalent zum p-System

$$\begin{aligned} \partial_t \tau - \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + \partial_x \tilde{p}(\tau) &= 0 \end{aligned}$$

ist, wobei $\tilde{p} = -p$ ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Betrachten wir die Differentialgleichung aus dem Beispiel zur Verkehrssimulation,

$$u_i''(t) = a_i \left(1 - \frac{u_i'(t)}{130} - \frac{d}{u_{i-1}(t) - u_i(t)}\right),$$

wobei u_i die Position des i-ten Autos, a_i seine maximale Beschleunigung und d der gewünschte Sicherheitsabstand der Autos ist.

Schreiben Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.