Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

30.10.2017

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 3

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 06.11.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem zu

$$u'' + u = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ ist das Problem eindeutig lösbar.

(b) Für $u(0) = 1$, $u(\pi) = -2$ besitzt das Problem keine Lösung.

(c) Für $u(0) = 1$, $u(\pi) = -1$ existieren unendlich viele Lösungen.

(d) Die Lösung des Randwertproblems zu

$$-u'' + u = 0$$

ist, falls sie existiert, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\partial_x^2 u + y\partial_y^2 u = 0.$$

(a) In welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ ist diese Gleichung elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch?

(b) Berechnen Sie in den Bereichen, in denen die Gleichung parabolisch oder hyperbolisch ist, die charakteristischen Richtungen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix. Ferner sei die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\, \partial_{x_i}\partial_{x_j} u = 0$$

elliptisch.
Zeigen Sie, dass A positiv oder negativ definit ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei L gegeben durch

$$Lu(x) := -\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x) + \sum_{i=1}^{2} b_i(x)\,\partial_{x_i}u(x) + c(x)\,u(x)$$

für $x \in \Omega$ ein Operator mit einer positiv definiten Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einem Vektor $b(x) \in \mathbb{R}^2$ und einem Koeffizienten $c(x) \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie für eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$:

$$\left.\begin{aligned} Lu \le 0 \quad &\text{in } \Omega \\ c \ge 0 \quad &\text{in } \Omega \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sup_{\Omega} u \le \max\Big\{0, \sup_{\partial\Omega} u\Big\}.$$