**Abteilung für**
**Angewandte Mathematik**

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

06.11.2017

Übung zur Vorlesung

# Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 4

## Übungsaufgaben

**Abgabe:** Montag, den 13.11.2017, vor der Vorlesung

**Aufgabe 1 (Maximumprinzip)** (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei $L$ gegeben durch

$$Lu(x) := -\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x) + \sum_{i=1}^{2} b_i(x)\,\partial_{x_i}u(x) + c(x)\,u(x)$$

für $x \in \Omega$ ein Operator mit einer positiv definiten Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einem Vektor $b(x) \in \mathbb{R}^2$ und einem Koeffizienten $c(x) \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie für eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$:

$$\left.\begin{aligned} Lu \leq 0 \quad &\text{in } \Omega \\ c \geq 0 \quad &\text{in } \Omega \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sup_{\Omega} u \leq \max\Big\{0, \sup_{\partial\Omega} u\Big\}.$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Eine Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt subharmonisch, falls für alle offenen Kugeln $B \subset\subset \Omega$ und alle $v \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ mit $\Delta v = 0$ gilt:

$$u \leq v \quad \text{auf } \partial B \qquad \Rightarrow \qquad u \leq v \quad \text{auf } B.$$

Zeigen Sie, dass das punktweise Maximum zweier subharmonischer Funktionen ebenfalls subharmonisch ist.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)
Sei $\Omega := \{(r,\varphi) \mid r \in (0,1), \varphi \in (0,\alpha)\}$ der Kreissektor mit dem Winkel $\alpha \in (0, 2\pi)$. Finden Sie die Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u(1,\varphi) &= \sin\frac{\varphi\pi}{\alpha} && \text{für } \varphi \in (0,\alpha), \\ u(r,0) = u(r,\alpha) &= 0 && \text{für } r \in (0,1). \end{aligned}$$

*Hinweis*: Machen Sie den Ansatz $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$.

**Aufgabe 4 (Konsistenz von $\Delta_h$)** (4 Punkte)

Für $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $h > 0$ seien die finite Differenzen-Operatoren $\partial_i^{+h}$ und $\partial_i^{-h}$ definiert durch

$$\partial_i^{+h} u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \qquad \partial_i^{-h} u(x) := \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h}.$$

Ferner sei $\nabla_h$ und $\Delta_h$ definiert durch

$$\begin{aligned} \nabla_h u(x) &:= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\partial_i^{-h} u(x) + \partial_i^{+h} u(x)\right) e_i, \\ \Delta_h u(x) &:= \sum_{i=1}^{n} \partial_i^{-h} \partial_i^{+h} u(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\nabla_h u$ bzw. $\Delta_h u$ konsistent von der Ordnung 2 mit $\nabla u$ bzw. $\Delta u$ sind, d.h. dass für $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\partial^\alpha u\|_\infty < \infty$ für $|\alpha| \leq 4$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\nabla_h u - \nabla u\|_\infty &\leq c(u)\, h^2, \\ \|\Delta_h u - \Delta u\|_\infty &\leq c(u)\, h^2, \end{aligned}$$

wobei $h$ unabhängig von $u$ ist.