Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

13.11.2017

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 5

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 20.11.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Omega := B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^2$. Finden Sie die Lösung $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -1 \quad \text{in } \Omega, \\ w &= -1 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hinweis: Machen Sie einen Separationsansatz: $w(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine symmetrische Matrix, die den Voraussetzungen des Maximumprinzips für Matrizen genügt.
Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu := -\Delta u + b \cdot \nabla u + c\, u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Funktionen $b : \Omega \to \mathbb{R}^2$ und $c, f : \Omega \to \mathbb{R}$. Diskretisieren Sie dieses Problem wie in der Vorlesung mittels finiter Differenzen, wobei Sie für den Gradienten die Approximation

$$\partial_{x_i} u \approx \frac{u(x + he_i) - u(x - he_i)}{2h}$$

verwenden.
Zeigen Sie unter geeigneten Bedingungen an b und c, dass diese Diskretisierung dem (diskreten) Maximumprinzip genügt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Omega = (0,1)^2$ und sei $u \in C^4(\overline{\Omega})$ die exakte Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zu $h = \frac{1}{N}$ sei $u_h : \overline{\Omega} \cap h\,\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ Lösung des diskreten Problems

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h &= f \quad \text{in } \Omega \cap h\,\mathbb{Z}^2, \\ u_h &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \cap h\,\mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Ferner definieren wir die stückweise bilineare Interpolation Π_h für $x \in [x_i, x_{i+1}]$ und $y \in [y_j, y_{j+1}]$ mit $x_i = ih$ bzw. $y_j = jh$ durch

$$\begin{aligned} \Pi_h w(x,y) :=& \frac{x - x_i}{h} \frac{y - y_j}{h} w(x_i, y_j) + \frac{x_{i+1} - x}{h} \frac{y - y_j}{h} w(x_{i+1}, y_j) \\ &+ \frac{x - x_i}{h} \frac{y_{j+1} - y}{h} w(x_i, y_{j+1}) + \frac{x_{i+1} - x}{h} \frac{y_{j+1} - y}{h} w(x_{i+1}, y_{j+1}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\left\| u - \Pi_h u_h \right\|_{C(\overline{\Omega})} \le C\, h^2$$