Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

20.11.2017

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 6

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 27.11.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $X := \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0, u'(1) = 1\}$. Ferner sei

$$I(u) := \int_0^1 (u'(x))^2 \, dx.$$

Zeigen Sie, dass es kein $u \in X$ gibt, sodass

$$I(u) = \inf_{v \in X} I(v).$$

Aufgabe 2 (Kettenregel für Sobolev-Funktionen) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p < \infty$, $u \in H^{1,p}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist $f \circ u \in H^{1,p}(\Omega)$ und es gilt:

$$D(f \circ u) = f'(u) Du.$$

Hinweis: Approximieren Sie u durch glatte Funktionen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ und $u \in H^{1,p}(\Omega)$. Sei $u^+ := \max\{u, 0\}$ und $u^- := \min\{u, 0\}$. Zeigen Sie, dass auch $u^+, u^-, |u| \in H^{1,p}(\Omega)$ sind und geben Sie die schwachen Ableitungen an.

Hinweis: Um die Aussage für u^+ zu zeigen, betrachten Sie z.B. die Glättung

$$f_\epsilon(u) := \begin{cases} (u^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \epsilon & \text{für } u > 0, \\ 0 & \text{für } u \leq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in L^\infty(\Omega)$ und

$$\Phi(p; u) := \left[\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1.$$

Zeigen Sie:

(a) $\Phi(p; u)$ ist monoton wachsend in p.

(b) $\lim\limits_{p \to \infty} \Phi(p; u) = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung.