Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

27.11.2017

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 7

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 04.12.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $h > 0$ sei Δ_h definiert durch

$$\Delta_h u(x) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^{-h} \partial_i^{+h} u(x) \quad \text{mit} \quad \partial_i^\delta u(x) := \frac{u(x + \delta e_i) - u(x)}{\delta}.$$

Zusätzlich existiere eine Funktion $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -1 \quad \text{in } \Omega, \\ w &< 0 \quad \text{auf } \Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie unter diesen Bedingungen die Stabilität der Diskretisierung

$$-\Delta_h u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in h\,\mathbb{Z}^n \cap \Omega.$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde $w = -1$ auf $\partial\Omega$ vorausgesetzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und sei L ein Operator der Form

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\partial_i u(x) + c(x)\,u(x)$$

mit $A \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $c \in C^0(\overline{\Omega})$. Ferner sei L gleichmäßig elliptisch, d.h. es gibt ein $\alpha > 0$, sodass $\xi \cdot A(x)\,\xi \geq \alpha|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass jede finite Differenzen-Approximation L_h von L, die von 2. Ordnung konsistent bzgl. der Maximumsnorm ist und dem diskreten Maximum-Prinzip genügt, stabil bzgl. der Maximumsnorm ist.
Hinweis: Vergleichen Sie mit $w(x) = R^2 - |x|^2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Betrachten Sie die Funktion

$$u(x) := \log\big|\log|x|\big|.$$

Zeigen Sie, dass $u \in H^{1,n}(\Omega)$ ist und dass kein $\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ existiert mit $\tilde{u} = u$ fast überall.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $u, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $-\Delta u = f$. Zeigen Sie:

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $\int (\Delta u)^2 = \int f^2$.