Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

04.12.2017

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 8

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 11.12.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Kritischer Sobolev–Exponent) (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, n)$. Zeigen Sie, dass falls für $q \in [1, \infty)$ eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass die Abschätzung

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ für alle } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

gilt, bereits

$$q = \frac{np}{n-p}$$

gelten muss.

Aufgabe 2 (Projektion im Banachraum) (4 Punkte)
Betrachten Sie den Banach-Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\big\{|x|, |y|\big\}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

bezeichnet. Bestimmen Sie für $x = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ und den Unterraum $U = \{(z, 0) : z \in \mathbb{R}\}$ eine Projektion $p \in U$ mit

$$\|x - p\|_\infty = \inf_{u \in U} \|x - u\|_\infty.$$

Ist p eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3 (Existenz der schwachen Lösung) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand, sei $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

genau eine schwache Lösung besitzt.

Aufgabe 4 (Poissonintegral) (4 Punkte)
Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $g \in C^0(\partial B_r(x_0))$. Zeigen Sie, dass

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{r\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|y - x|^n} g(y)\,\mathrm{d}y & \text{für } x \in B_r(x_0), \\ g(x) & \text{für } x \in \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

eine Lösung $u \in C^0(\overline{B_r(x_0)}) \cap C^2(B_r(x_0))$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } B_r(x_0), \\ u &= g \quad \text{auf } \partial B_r(x_0) \end{aligned}$$

ist.