Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

11.12.2017

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 9

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 18.12.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Hölder-Stetigkeit) (4 Punkte)

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}$-Hölderstetig? Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 2 (Neumann-Problem) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex und beschränkt mit Lipschitz-Rand und sei $f \in L^2(\Omega)$. Die Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Neumann-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{$*$}$$

falls für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass das Problem $(*)$ genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Raum $X := \{u \in H^1(\Omega) \mid (u,1)_{H^1(\Omega)} = 0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$ zwei abgeschlossene Dreiecke mit genau einer gemeinsamen Kante, so dass

$$\operatorname{int}(T_1) \cap \operatorname{int}(T_2) = \emptyset.$$

Für $T := \operatorname{int}(T_1 \cup T_2)$ sei $u \in C^0\left(\overline{T}\right)$, so dass $u|_{T_i} \in C^1(T_i)$ für $i = 1,2$. Zeigen Sie, dass $u \in H^{1,2}(T)$ gilt.

Aufgabe 4 (Einbettung) (4 Punkte)

Seien X,Y Banachräume mit stetiger Einbettung $X \hookrightarrow Y$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Falls $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in X, dann folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in Y.

(ii) Sei $X \hookrightarrow Y$ kompakt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine beschränkte Folge. Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge bezüglich Y.

(iii) Sei X endlichdimensional. Dann ist die Einbettung $X \hookrightarrow X$ kompakt.