

Übung zur Vorlesung
**Einführung in Theorie und Numerik partieller
Differentialgleichungen**

WS 2017/18 — Blatt 10

ÜBUNGSAUFGABEN

Abgabe: Montag, den 08.01.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Schwache Differenzierbarkeit Lipschitz-stetiger Funktionen) (4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$. Zeigen Sie für $p \in [1, \infty)$, dass $u \in H^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\|\partial_i u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} L \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n.$$

Aufgabe 2 (Partielle Integration in Sobolev-Räumen)

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} u \partial_i v \, dx = - \int_{\Omega} \partial_i u v \, dx.$$

Aufgabe 3 (Differenzenquotienten in L^p)

(4 Punkte)

Für $u \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, ist der Differenzenquotient $\partial_i^h u$ definiert durch

$$\partial_i^h u(x) := \frac{u(x + h e_i) - u(x)}{h}, \quad x \in \Omega' \subset\subset \Omega \text{ mit } |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Zeigen Sie für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $|h| < \text{dist}(\text{supp } \varphi, \partial\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \partial_i^h u \varphi \, dx = - \int_{\Omega} u \partial_i^{-h} \varphi \, dx.$$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung des Vorlesungsstoffes)

(4 Punkte)

Fassen Sie die, Ihrer Meinung nach, wichtigsten Inhalte des bisherigen Vorlesungsstoffes zusammen und erstellen Sie einen Überblick im Umfang von maximal einer DIN A4-Seite. Nutzen Sie diese Aufgabe um sich (auch im Hinblick auf die Klausur) etwas eingehender mit dem Vorlesungsstoff zu beschäftigen.