Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

08.01.2018

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 11

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 15.01.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Transformation auf Referenzdreieck) (4 Punkte)
Seien
$$T_1 := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right\} \quad \text{und} \quad T_2 := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$
Bestimmen Sie eine affin-lineare Abbildung $F\colon T_1 \to T_2$, so dass
$$F\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
Wiederholen Sie Ihre Herleitung für ein allgemeines, nichtentartetes Dreieck $T_1 := \operatorname{conv}\{x_1, x_2, x_3\}$ mit Eckpunkten $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}^2$, so dass $T_1 := \operatorname{conv}\{x_1, x_2, x_3\}$ und $T_2 := \operatorname{conv}\{x_2, x_3, x_4\}$ nicht entartet sind und $|T_1 \cap T_2| = 0$ ist. Seien φ_i, $i = 1, \dots, 4$ stückweise affin-lineare Funktionen auf $\Omega \supset (T_1 \cup T_2)$ (d.h. $\varphi_{i|T_j} \in \mathbb{P}_1(T_j)$) mit $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Berechnen Sie $\int_{T_1 \cup T_2} \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_3 \,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein polygonales Gebiet und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Ω, $|\mathcal{T}| < \infty$, so dass gilt:

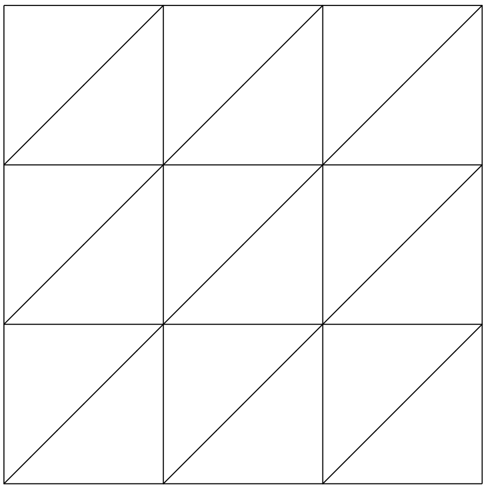
(i) $T \in \mathcal{T}$ ist ein n-Simplex und $\bigcup \mathcal{T} = \overline{\Omega}$.

(ii) Ist $T, \tilde{T} \in \mathcal{T}$, so ist $|T \cap \tilde{T}| = 0$.

Sei $V_{\mathcal{T}} := \left\{v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\right\}$ der Raum der stetigen, stückweise affin-linearen Funktionen auf $\mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass $V_{\mathcal{T}} \subset H^1(\Omega)$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Betrachten Sie die folgende Triangulierung $\mathcal{T}$ des Gebiets $\Omega = (0,1)^2$:



Sei $V_{\mathcal{T}} := \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \right\}$. Bestimmen Sie eine Basis von $V_{\mathcal{T}} \cap \mathring{H}^1(\Omega)$.

(b) Bestimmen Sie $u_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}} \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = 2 \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in V_{\mathcal{T}} \cap \mathring{H}^1(\Omega)$.