Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

15.01.2018

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 12

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 22.01.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Innere Regularität) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in H^k(\Omega)$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u = f$ in Ω. Zeigen Sie, dass $u \in H^{k+2}(\Omega')$ für jede Teilmenge $\Omega' \subset\subset \Omega$ sowie die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \;\leq\; C(\Omega')\left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{H^k(\Omega)}\right).$$

Aufgabe 2 (Differentation unter affiner Transformation) (4 Punkte)

Für Gebiete $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ sei $F\colon \Omega_2 \to \Omega_1$ durch $F(x) = Ax + b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Für $u \in H^{m,p}(\Omega_1)$ sei $v = u \circ F$. Beweisen Sie für $i, j = 1, 2, \ldots, n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die folgenden Aussagen.

(a) Falls $m \geq 1$, gilt $\partial_i v = \sum_{k=1}^{n} \partial_k u A_{ki}$.

(b) Falls $m \geq 2$, gilt $\partial_j \partial_i v = \sum_{k,l=1}^{n} \partial_l \partial_k u A_{lj} A_{ki}$.

(c) Falls $m \geq |\alpha|$, gilt $|\partial^\alpha v| \leq |A|^l \sum_{|\mu|=l} |\partial^\mu u(F(\cdot))|$.

Aufgabe 3 (L^2-Projektion) (4 Punkte)

Bestimmen Sie die $L^2(0,1)$-Projektion

$$\mathcal{P}u \in V_{\mathcal{T}} \;:=\; \left\{ v \in C^0([0,1]) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \;\text{ für alle }\; T \in \{(0,\tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2},1)\} \right\}.$$

der Funktion $u(x) = 24x^2$ auf $V_{\mathcal{T}}$ durch Ausnutzen der Orthogonalitätsbedingung

$$\left(u - \mathcal{P}u, v\right)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \text{für alle } v \in V_{\mathcal{T}}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{T}$ die Triangulierung von $\Omega = (0,1)^2$, die in Abbildung 1 dargestellt ist und sei $V_{\mathcal{T}}$ durch

$$V_{\mathcal{T}} \; := \; \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \;\text{ für alle }\; T \in \mathcal{T} \right\}$$

gegeben. Weiter sei $f(x) := x_1(1-x_1) + x_2(1-x_2)$. Bestimmen Sie $u_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T}} \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x \;=\; \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \; \varphi \in V_{\mathcal{T}} \cap \mathring{H}^1(\Omega).$$

Dabei soll das Integral auf der rechten Seite auf jedem Dreieck T mit Eckpunkten a_1, a_2, a_3 durch folgende Quadraturformel approximiert werden:

$$\int_T g \,\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{1}{3}\left(g(a_1) + g(a_2) + g(a_3)\right)|T|.$$

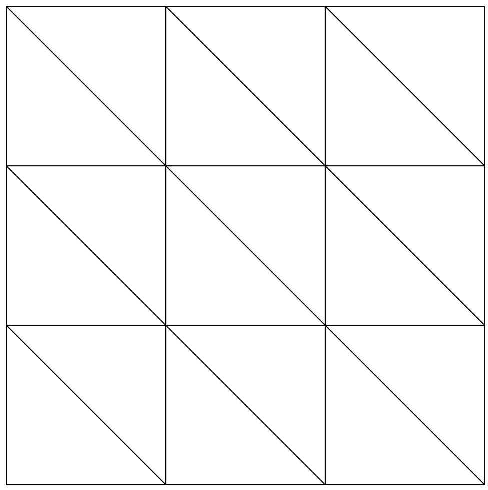

Abbildung 1: Triangulierung des Gebietes $\Omega = (0,1)^2$.

Hinweis: Stellen Sie $u_{\mathcal{T}}$ und φ mit Hilfe der Lagrange-Basis von $V_{\mathcal{T}}$ dar.