**Abteilung für
Angewandte Mathematik**

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

22.01.2018

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 13

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 29.01.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Baryzentrische Koordinaten I) (6 Punkte)
Sei T ein n-Simplex, $\lambda(x) = (\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x))$ die baryzentrischen Koordinaten in T. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$

$$\int_T \lambda^\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha! n!}{(|\alpha| + n)!}|T|.$$

gilt. Dabei ist $\lambda^\alpha := \lambda_0^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$ und $\alpha! := \alpha_0! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.

Hinweis: Induktion über n.

Aufgabe 2 (Baryzentrische Koordinaten II) (6 Punkte)
Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein 2-Simplex. Berechnen Sie für $p \in \mathbb{P}_2(T)$ das Integral $\int_T p\,\mathrm{d}x$ in Abhängigkeit der Werte von p in den Ecken und Kantenmittelpunkten von T.

Aufgabe 3 (Skalierungsverhalten unter affin-linearer Transformation) (4 Punkte)
Seien $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und affin-äquivalent, d.h. es gibt eine invertierbare, affin-lineare Abbildung $F\colon T_2 \to T_1$, $y \mapsto F(y) = Ay + b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ mit $T_1 = F(T_2)$. Beweisen Sie für $m \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$, dass für alle $u \in H^{m,p}(T_1)$ die Abschätzung

$$|u|_{H^{m,p}(T_1)} \le c|A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{p}} |u \circ F|_{H^{m,p}(T_2)}$$

gilt, wobei die Konstante $c = c(m, n, p)$ nur von m, n und p abhängt.