Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner 29.01.2018
Dr. J. Daube

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2017/18 — Blatt 14

Übungsaufgaben

Abgabe: Montag, den 05.02.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_H$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in H$ gilt:

$$\|u\|_H = \sup_{v\in H\setminus\{0\}} \frac{(u,v)_H}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v\in H\\ \|v\|_H=1}} (u,v)_H.$$

Aufgabe 2 (Betragsfunktion) (4 Punkte)

Sei $u(x) = |x|$ für $x \in \,]-1,1[$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(]-1,1[) \setminus H^2(]-1,1[)$.

Aufgabe 3 (Schwaches Maximumprinzip) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$-\Delta u \le 0 \quad \text{in } \Omega,$$

d.h. für alle $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)$, $\varphi \ge 0$ f.ü. gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x \le 0.$$

Zeige Sie, dass $u \le 0$ f.ü. in Ω.

Aufgabe 4 (Bilineare Elemente) (4 Punkte)

Sei $\bar{R} := [-1,1]^2$ mit den Eckpunkten $\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_4 \in \mathbb{R}^2$. Weiter sei $R \subset \mathbb{R}^2$ ein beliebiges Viereck mit Eckpunkten $a_1,\dots,a_4 \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert genau eine bilineare Abbildung $F\colon \bar{R} \to R$, d.h.

$$F(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1x_2 \quad \text{mit } c_1,\dots,c_4 \in \mathbb{R}^2,$$

sodass $F(\overline{a}_i) = a_i$, $i = 1,\dots,4$.

(b) F ist genau dann affin linear, wenn R ein Parallelogramm ist.

(c) Das Bild von $[-1,1]^2$ unter F liegt in der konvexen Hülle von $a_1,\dots,a_4$.