Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

20.11.2019

Praktikum zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Lösungen lineare Gleichungssysteme mit regulärer unterer bzw. oberere Dreiecksmatrizen sind gegeben durch die folgenden Algorithmen zur Vorwärts- bzw. Rückwartssubstitution:

$$x_j = \frac{1}{u_{jj}}\Big(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} u_{jk}x_k\Big)\,, \qquad x_j = \frac{1}{l_{jj}}\Big(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} l_{jk}x_k\Big)\,.$$

Implementieren Sie die obige Algorithmen und testen Sie ihre Verfahren für die Gleichungssysteme $A_l x = b_l$, $l = 1, 2, 3$, mit

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Die LU-Faktorisierung einer LU-zerlegbaren Matrix A ist durch den folgenden Algorithmus von Crout gegeben:

$$u_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}u_{jk}\,, \qquad l_{ki} = \frac{1}{u_{ii}}\Big(a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj}u_{ji}\Big)\,.$$

(i) Implementieren Sie den obigen Algorithmus, berechnen Sie LU-Zerlegungen und testen Sie, dass $A = LU$ gilt, für

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

für ε sehr klein

(ii) Erweitern Sie ihr Programm so, dass Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ lösen können. Testen ihr Programm mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 & -4 \\ -3 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 21 \\ -33 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie die LU-Zerlegung einer Tridiagonalmatrix A und vergewissern Sie sich, dass L und U nur eine bzw. zwei nichttriviale Diagonalen besitzen: d.h. $L_{ij} = 0$ für $i > j + 1$ und $U_{ij} = 0$ für $j > i + 1$.

Nutzen Sie diese Einsicht aus, um einen effizienteren Algorithmus für die LU-Zerlegung in diesem Fall zu entwickeln. Testen Sie ihr Verfahren an der $n \times n$-Matrix A mit $a_{ii} = 4$ und $a_{i,i+1} = a_{i-1,i} = -1$ für verschiedene n

Abgabe: Freitag, den 29.11.2019, bis 24:00 per Email an ihren Tutor.