Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

04.12.2019

Praktikum zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv-definiten Matrix A wird durch den Algorithmus

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}\,, \qquad l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}}\Big(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}\Big) \quad (i > k)$$

berechnet. Implementieren Sie den obigen Algorithmus und berechnen Sie die Cholesky-Zerlegungen von

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Testen Sie, dass $A = LL^\top$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Stören Sie die rechte Seite des nachfolgenden Gleichungssytems $Ax = b$ mit dem Vektor $\delta b \in \mathbb{R}^n$, $\delta b_i = 10^{-5} \cos(\frac{i\pi}{n})$ für $i = 1, \ldots, n$ und $n = 10$:

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}\,, \quad b_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{i + k - 1}\,, \quad x_i = (-1)^{i-1}\,, \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Berechnen Sie die Lösung des gestörten Systems $\tilde{x} = x + \delta x$ und den relativen Fehler $\|\delta x\|_2 \,/\, \|x\|_2$. Zum Lösen der Gleichungssyteme eignet sich die Cholesky-Zerlegung aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Implementieren Sie einen Algorithmus zur Berechnug der LU-Zerlegung mit Spalten-Pivotisierung. Führen Sie dazu einen Vektor π ein, der die Zeilenvertauschungen berücksichtigt. Implementieren Sie zudem ein Abbruchkriterium, das das Verfahren abbricht, sofern für das Pivotelement die Abschätzung $\left|a^{(k)}_{\pi(k),k}\right| < 10^{-10}$ gilt.

(i) Berechnen sie die PLU-Zerlegungen und testen Sie, dass $PA = LU$ gilt, für

$$A_1 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mit $\epsilon \ll 1$.

(bitte wenden)

(ii) Erweitern Sie ihr Programm so, dass Sie mit Hilfe der PLU-Zerlegung Gleichungssysteme $Ax = b$ lösen können. Beachten Sie bei der Rücksubstitution die Zeilenvertauschungen. Testen Sie das Verfahren mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

und weiteren Beispielen.

Abgabe: Freitag, den 13.12.2019, bis 24:00 per Email an ihren Tutor.