

Praktikum zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 5

Aufgabe 1

(16 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b, x^0 \in \mathbb{R}^n$. Implementieren Sie das Jacobi-Verfahren

$$x_i^{m+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^m - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^m \right) \quad (i = 1, \dots, n),$$

und das Gauss-Seidel-Verfahren

$$x_i^{m+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{m+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^m \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

zur iterativen Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Die Iteration soll abgebrochen werden, sobald für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\Delta_{\text{rel}}^m := \frac{\|x^{m+1} - x^m\|_2}{\|x^m\|_2} < \varepsilon.$$

Testen Sie ihre Verfahren mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n = 5^r$, $r = 1, \dots, 5$ und $b = Ax$ gegeben durch

$$x_i = (-1)^i, \quad a_{ij} = \begin{cases} 4, & i = j, \\ -(i-j)^{-2}, & i \neq j, \end{cases}$$

sowie Startwert $x^0 = 0$.

- (i) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der beiden Verfahren anhand der obigen Gleichungssysteme. Bestimmen Sie dazu jeweils die Anzahl an Iterationsschritten m_k mit

$$m_k = \min_{m \in \mathbb{N}} \{ \Delta_{\text{rel}}^m < 10^{-k} \} \quad (k = 3, \dots, 10)$$

und die relative Abweichung von der exakten Lösung

$$\frac{\|x^{m_k} - x\|_2}{\|x\|_2} \quad (k = 3, \dots, 10).$$

- (ii) Seien D eine Diagonalmatrix mit $d_{ii} = a_{ii}$, L eine untere Dreiecksmatrix mit $l_{ij} = -a_{ij}$ für $i > j$ und U eine obere Dreiecksmatrix mit $u_{ij} = -a_{ij}$ für $i < j$, so dass $A = D - L - U$. Zeigen Sie, dass die zweite Normalform des Jacobi-Verfahren

$$x^{m+1} = x^m - D^{-1}(Ax^m - b)$$

bzw. des Gauss-Seidel-Verfahrens

$$x^{m+1} = x^m - (D - L)^{-1}(Ax^m - b)$$

äquivalent zu der jeweiligen obigen komponentenweisen Darstellung ist. **(bitte wenden)**

- (iii) Begründen Sie, warum das Jacobi-Verfahren und das Gauss-Seidel-Verfahren auch *Gesamtschrittverfahren* und *Einzelrittverfahren* genannt werden.

Abgabe: Freitag, den 24.01.2020, bis 24:00 per Email an ihren Tutor.