

Praktikum zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 6

Aufgabe 1

(16 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $\text{rang } A = n$. Das lineare Ausgleichsproblem ist gegeben durch

$$\|b - Ax^*\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2.$$

Der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des Ausgleichsproblems, wenn x^* die Normalengleichung löst

$$A^\top Ax^* = A^\top b.$$

Alternativ kann die Lösung auch mittels QR-Zerlegung bestimmt werden. Sei

$$Q^\top A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q^\top b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

dann ist durch $Rx^* = b_1$ eine Lösung des Ausgleichsproblems gegeben, wobei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(i) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 5}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6,$$

für $\varepsilon = 10^{-k}$, $k = 5, \dots, 8$ mittels der Normalengleichung und der QR-Zerlegung wie oben beschrieben. Verwenden Sie zum Lösen der Normalengleichung eines der Verfahren aus den bisherigen Aufgaben. (*Hinweis:* $A^\top A$ ist symmetrisch und positiv definit).

(ii) Aus der Physik ist bekannt, dass Körper die nur der Schwerkraft ausgesetzt sind, in Parabeln fliegen. Ein Körper habe die Anfangsgeschwindigkeit $v = (v_x, v_y)$ und befinde sich am Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt $(0, 0)$. Zum Zeitpunkt t befindet er sich dann am Ort $x = v_x t$, $y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2$, wobei g die Erdbeschleunigung ist.

(bitte wenden)

In einer Versuchsreihe wurden folgende Werte gemessen:

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i	0.1	0.2	0.6	0.9	1.1	1.2	2.0
x_i	0.73	1.28	4.24	6.11	7.69	8.21	13.83
y_i	0.96	1.81	4.23	5.05	5.15	4.81	0.55

Formulieren Sie ein geeignetes Ausgleichsproblem zur Bestimmung von v_x , v_y und g . Lösen Sie dieses mittels QR-Zerlegung, plotten Sie die Messwerte und die berechnete Parabel und vergleichen Sie diese.

Abgabe: Freitag, den 7.02.2020, bis 24:00 per Email an ihren Tutor.