Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

23.10.2019

Übung zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Anwesenheitsaufgabe

Aufgabe 1 (Aufwand)
Bestimmen Sie die Größenordnung des Aufwands für die Matrix-Vektor-Multiplikation, die Matrix-Matrix-Multiplikation sowie die Bestimung der Determinante einer Matrix mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz.

Aufgabe 2 (Alter des Universums)
Eine Rechner arbeiten mit 10^9 Gleitkommaoperationen pro Sekunde (FLOPS) une es seien drei Algorithmen mit Aufwand $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{O}(n^3)$ bzw. $\mathcal{O}(n!)$ zur Lösung derselben Aufgabe gegeben. Wieviele Sekunden, Minuten, Stunden, Tage oder Jahre benötigen die Algorithmen etwa für die Problemgrößen $n = 10^k$ mit $k = 1, 2, ..., 6$.

Aufgabe 3 (Gruppeneigenschaften)
Zeigen Sie, dass die invertierbaren (bzw. normalisierten) unteren Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, d.h. sind $L_0, L_1, L_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere Dreiecksmatrizen mit $\det L_i \neq 0$ (bzw. $(L_i)_{jj}$ für $j = 1, ..., n$), so sind L_0^{-1} und $L_1 L_2$ ebenfalls invertierbare (bzw. normalisierte) untere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 4 (Kern, Bild, Rang)

(i) Zeigen Sie, dass $(\operatorname{im} A^\top)^\perp = \operatorname{kern} A$ mit

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = 0 \text{ für alle } w \in V\}\,.$$

(ii) Beweisen Sie die Dimensionsformel $n = \dim(\operatorname{im} A) + \dim(\operatorname{kern} A)$ und folgern Sie, dass $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^\top$, wobei für eine Matrix M der Spaltenrang von M durch $\operatorname{rang} M = \dim(\operatorname{im} M)$ definiert ist.