Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

30.10.2019

Übung zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. auf $\mathbb{R}^m$ und sei $\|\cdot\|_{\text{op}}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie:

(i) $\|\cdot\|_{\text{op}}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(ii) $\|A\|_{\text{op}} := \sup_{\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_n = 1\}} \|Ax\|_m = \inf\{c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ \|Ax\|_m \leq c\,\|x\|_n\}$.

(iii) Für $A \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $\|x\|_n \leq 1$ und $\|Ax\|_m = \|Ax\|_{\text{op}}$ folgt $\|x\|_n = 1$.

(iv) Das Infimum und Supremum in (ii) werden angenommen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(i) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|x\|_p$ die l^p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|A\|_p$ die dazugehörige induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Abschätzungen

$$\sqrt{n^{-1}}\,\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$$
$$n^{-1}\,\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\,\|A\|_\infty$$

gelten und geben Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, die zeigen, dass sich diese Abschätzungen nicht verbessern lassen (d.h. für jede der vier Ungleichungen und jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ finden Sie ein A, so dass Gleichheit gilt).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch $\|A\|_{\mathcal{F}}^2 := \sum_{1<i,j<n} |a_{ij}|^2$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^\top A)}\,.$$

Folgern Sie, dass die Frobeniusnorm mit der von der Euklidischen Norm induzierten Operatornorm verträglich ist in dem Sinne, dass

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathcal{F}} \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2\,.$$

[Sie dürfen dazu die Identität $\operatorname{tr}(A^\top A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ mit den (nichtnegativen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $A^\top A$ verwenden.]

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $A, L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = L\,U$ gegeben, wobei L eine untere und U eine obere Dreiecksmatrix ist. Zeigen Sie, dass für $k = 1, 2, \ldots, n$ und die linken, oberen $k \times k$-Teilmatrizen A_k, L_k und U_k von A, L beziehungsweise U ebenfalls die Zerlegung $A_k = L_k\,U_k$ gilt.

Abgabe: Freitag, den 08.11.2019, bis 14:00 in die Briefkästen vor dem CIP-Pool (SR 201, HH10).