**Abteilung für
Angewandte Mathematik**

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

13.11.2019

Übung zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ mit $\delta_1 < 1$. Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von

$$(\mathbb{I} - \delta_1 \mathbb{I})\bar{x} = (1 + \delta_2)b\,,$$

wobei $\mathbb{I}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichne. Zeigen Sie nach geeigneter Wahl von $A, \delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\delta b \in \mathbb{R}^n$, dass in der Abschätzung aus dem Störungssatz für lineare Gleichungssysteme

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond} A}{1 - \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\operatorname{cond} A}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

die Gleichheit gelten kann, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$ bezeichne.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren *ohne* Pivotsuche zur Lösung des lineare Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 16 & -4 & 3 \\ -3 & 20 & -22 & 0 \\ 1 & -16 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -24 \\ -45 \\ 20 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie auch die LU-Zerlegung von A.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(i) Wie lässt sich die LU-Zerlegung im Fall symmetrischer Matrizen, vereinfachen und welcher Aufwand ergibt sich.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix mit Bandweite m, d.h. es gelte $a_{ij} = 0$ falls $|i - j| > m$. Wie groß ist der Aufwand der Berechnung der LU-Zerlegung, sofern diese existiert?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Permutationsmatrix, die den k-ten und den p-ten Eintrag eines Vektors vertauscht, wobei $p > k$ gelte.

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimmen Sie PA sowie AP.

(bitte wenden)

(ii) Sei nun $j < k$, $L = \mathbb{I}_n - l_j e_j^\top$ mit dem kanonischen Einheitsvektor $e_j \in \mathbb{R}^n$ und einem Vektor $l_j = [0, \ldots, 0, l_{j+1,j}, \ldots, l_{n,j}]^\top$. Zeigen Sie, dass ein Vektor

$$\hat{l}_j = [0, \ldots, 0, \hat{l}_{j+1,j}, \ldots, \hat{l}_{n,j}]^\top$$

existiert, so dass mit $\hat{L} = \mathbb{I}_n - \hat{l}_j e_j^\top$ die Identität $\hat{L} = PLP$ gilt.

Abgabe: Freitag, den 22.11.2019, bis 14:00 in die Briefkästen vor dem CIP-Pool (SR 201, HH10).