Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

27.11.2019

Übung zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Bijektion $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ gehörende Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass $P^\top = P^{-1}$ und

$$P^{-1} = \left[e_{\pi^{-1}(1)}, e_{\pi^{-1}(2)}, \dots, e_{\pi^{-1}(n)}\right],$$

wobei $\{e_k\}$ die kanonischen Basisvektoren sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Für $k = 1, 2, \dots, n-1$ sei $L^{(k)} = \mathbb{I}_n - l_k e_k^\top$ mit Vektoren $l_j = [0, \dots, 0, l_{k+1,k}, \dots, l_{n,k}]^\top$ und es sei $\tilde{L} = L^{(n-1)} L^{(n-2)} \dots L^{(1)}$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{L}^{-1} = \mathbb{I}_n + \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_k^\top .$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit.

(i) Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte normalisierte untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit positiven Diagonaleinträgen existiert, so dass $A = LDL^\top$ gilt.

(ii) Entwickeln Sie ein Verfahren zur Bestimmung von L und D, das die Verwendung der Wurzelfunktion vermeidet, und bestimmen Sie die Matrizen L und D für

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Eine Householder-Matrix $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ definiert durch $P = \mathbb{I}_m - 2vv^\top$.

(i) Zeigen Sie, dass $P^\top = P$ und $P^{-1} = P$ gelten.

(ii) Zeigen Sie, dass eine reele $m \times m$-Householder-Matrix einen $m-1$-fachen Eigenwert 1 und einen einfachen Eigenwert -1 hat.

(iii) Konstruieren Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen für $m = 2, 3$ eine Householder-Matrix, die einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ auf ein Vielfaches des Einheitsvektors $e_1 \in \mathbb{R}^m$ abbildet.

Abgabe: Freitag, den 06.12.2019, bis 14:00 in die Briefkästen vor dem CIP-Pool (SR 201, HH10).