

Übung zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 4

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Sei (v_1, v_2, \dots, v_n) eine Basis des \mathbb{R}^n .

- (i) Zeigen Sie, dass die durch $g_{ij} = v_i \cdot v_j$ definierte Matrix $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass G invertierbar und G^{-1} ebenfalls symmetrisch und positiv definit ist.
- (iii) Konstruieren Sie eine untere Dreiecksmatrix $L^{n \times n}$, so dass $W = LV \in O(n)$ gilt, wobei $V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

- (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $A = QR$ eine QR -Zerlegung von A . Zeigen Sie, dass $\text{cond}_2 R = \text{cond}_2 A$ gilt.
- (ii) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe maximalen Rang und es sei $A = QR$ eine QR -Zerlegung von A . Zeigen Sie, dass R eine Cholesky-Zerlegung von $A^T A$ definiert.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe passender Householder-Transformationen eine QR -Zerlegung für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = (1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $1 \leq m \leq n$, so dass die linke obere $m \times m$ -Teilmatrix $A_{11} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ ebenfalls regulär ist. Sei A zerlegt gemäss

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Schurkomplement $S := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ regulär ist und, dass A^{-1} gegeben ist durch

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich wie die Determinante einer Blockdreiecksmatrix aussieht und beachten Sie, dass gilt

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Id} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & S \end{bmatrix}.$$

Abgabe: Freitag, den 20.12.2019, bis 14:00 in die Briefkästen vor dem CIP-Pool (SR 201, HH10).